Elementare Mathematik:
Eigenschaften von Zahlenbereichen

Beweis der Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 ($\sqrt{2} \in \mathbb{R}$)

Peter Jockisch, Freiburg i. Br.
peterjockisch.com

2. Oktober 2022

Für den Nachweis der Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 existieren verschiedene Beweisführungen. Dieser Artikel erläutert ausführlich die indirekte Beweisvariante und stellt eine der möglichen Kurzschreibweisen in mathematischer Notation vor. Übungsaufgaben mit Lösungen festigen das Erlernte.

Inhaltsverzeichnis

1 Der indirekte Beweis **2**
1.1 Die Vorgehensweise beim Widerspruchsbeweis 2
1.2 Zur Notation von Beweisen 2
1.3 Definition O. B. d. A. 2

2 Beweis der Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 **3**
2.1 Einleitung 3
2.2 Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ 3
2.3 Beweis in Kurzschreibweise 5
2.3.1 Erläuterung der mathematischen Symbole 6
2.3.2 Beweis $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, in Kurzschreibweise 6

3 Übungsaufgaben mit Lösungen **7**

Literatur **12**

Impressum **13**
3.1 Impressum 13

1 Der indirekte Beweis

1.1 Die Vorgehensweise beim Widerspruchsbeweis

Der „Satz vom ausgeschlossenen Dritten“ (Tertium non datur) besagt, daß eine Aussage und ihre Verneinung (Negation) nicht beide falsch sein können und daß eine von beiden wahr sein muß.

Bei der indirekten Beweisführung wird angenommen, daß die zu beweisende Behauptung falsch ist. Dann wird diese Annahme zu einem Widerspruch geführt.

Wenn aber die Verneinung einer Aussage zu einem Widerspruch führt, dann muß die Aussage wahr sein. Gemäß dem *Satz vom ausgeschlossenem Dritten* kann es ja keine dritte Möglichkeit geben.

Neben der zweiwertigen Logik existieren auch mehrwertige bzw. n-wertige Logiken.[1]

1.2 Zur Notation von Beweisen

Beweis-Übungsaufgaben beginnen meistens mit „Zeigen Sie:“, „Beweisen Sie:“, oder mit „Zu zeigen:“, abgekürzt „Z. z.:“.

Bei indirekten Beweisführungen wird der auftretende Widerspruch mit einem Gewitterblitz gekennzeichnet: $\lightning$.

Der Abschluß eines Beweises wird entweder mit der Abkürzung „q.e.d“ markiert, welche für die lateinischen Wörter *quod erat demonstrandum* steht, zu deutsch: „was zu beweisen war“. Oder es wird ein weißes bzw. schwarzes Quadrat als Abschlußsymbol verwendet: $\square$.

1.3 Definition O. B. d. A.

O. B. d. A., „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“, ist ein in Beweisen verwendeter Hinweis der besagt, daß der im Beweis betrachtete spezielle Fall auch alle anderen möglichen Fälle abdeckt.

Man rechnet also exemplarisch einen Fall durch, der gleichzeitig für alle anderen Möglichkeiten steht. Der im Beweis behandelte Fall ist somit ohne Ausnahme auch für alle anderen Fälle charakteristisch und gültig.

[1] Grundlagenwerk: Gotthard Günther, „Idee und Grundriß einer nicht-Aristotelischen Logik. 1. Band: Die Idee und ihre philosophischen Voraussetzungen.“, Verlag von Felix Meiner, Hamburg 1959.

2 Beweis der Irrationalität der Quadratwurzel aus 2

2.1 Einleitung

Wir möchten zeigen, daß $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellbar ist, daß also gilt: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Brüche haben die Form $\frac{a}{b}$ und stammen aus der Menge der rationalen Zahlen, $\mathbb{Q}$. Im Zähler steht eine ganze Zahl.[2] Der Nenner b muß eine natürliche Zahl[3] sein, damit eine Division durch Null ausgeschlossen ist:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N} \right\}$$

Lies: „Q ist die Menge aller Elemente (aller Brüche) a durch b für die gilt: a (ist) Element (von) Z und b (ist) Element (von) N".[4]

Wir zeigen nun, daß $\sqrt{2}$ nicht zur Menge der rationalen Zahlen gehört, sondern zur Obermenge von $\mathbb{Q}$, der Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}$.

2.2 Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$

Zeigen Sie: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: indirekt. Wir nehmen an, daß $\sqrt{2}$ *nicht* irrational ist.

1. Dann ist $\sqrt{2}$ rational ($\in \mathbb{Q}$) und läßt sich als Bruch schreiben:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit[5] nehmen wir an, daß $\frac{a}{b}$ als gekürzter Bruch vorliegt, denn zu jedem Bruch existiert ja auch ein gekürzter Bruch. Das bedeutet, daß a und

---

[2] Die Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

[3] Die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

[4] Beziehungsweise: „Die Menge Q besteht aus allen Elementen a durch b, für die gilt, a ist Element von Z und b ist Element von N."

[5] Eine allgemeine Definition zu O. B. d. A. findet sich in Abschnitt 1.3 auf der vorherigen Seite. Erläuterung von O. B. d. A. im Bezugsrahmen dieses Beweises: Die Annahme, daß sich der Bruch $\frac{a}{b}$ auf Primfaktoren reduzieren läßt, gilt auch für alle anderen möglichen Fälle, das heißt für alle anderen Wurzeln aus *nichtquadratischen Zahlen*, wie z. B. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, usw. Man lese die nachfolgende Begründung, warum nur Wurzeln aus nichtquadratischen Zahlen zugelassen sind, erst nach der Verinnerlichung des Beweises im Haupttext.

Würden wir auch quadratische Zahlen zulassen, dann würde die Annahme, daß sich die Wurzel aus der quadratischen Zahl als Bruch zweier teilerfremder Zahlen darstellen läßt, *nicht* zu einem Widerspruch führen. Beispiel: Die 4 ist eine quadratische Zahl, $4 = 2 \cdot 2$, und läßt sich als teilerfremder Bruch

b teilerfremd sind, also keinen anderen gemeinsamen Teiler als die 1 haben.[6]

3. Wir formen nun die Gleichung nach a^2 um:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{a}{b} \qquad \mid (\ )^2 \text{ Quadrieren} \\ 2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ 2 &= \frac{a^2}{b^2} \qquad \mid \cdot b^2 \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Aus der Gleichung $2b^2 = a^2$ geht hervor, daß a^2 eine gerade Zahl sein muß. Eine gerade Zahl kann nämlich als $\pm 2k$ definiert werden, mit $k \in \mathbb{N}_0$.[7] Die 2 ist also ein Teiler von a^2, in der Teilermenge von a^2 enthalten.[8]

4. Wir benutzen nun die folgenden elementaren Tatsachen für unsere weitere Schlußfol-

darstellen, beispielsweise $\sqrt{4} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1} = 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{4} &= \frac{a}{b} \qquad \mid (\ )^2 \text{ Quadrieren} \\ 4 &= \frac{a^2}{b^2} \qquad \mid \cdot b^2 \\ 4b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Aus der Gleichung $4b^2 = a^2$ geht hervor, daß a^2 eine gerade Zahl ist $(2 \cdot 2 \cdot b^2 = a^2)$ und somit auch der Zähler a gerade sein muß. Daher setzen wir $a = 2k$, lösen nach b^2 auf und stellen fest, daß b eine ungerade Zahl ist und somit *kein* Widerspruch entsteht, da Zähler und Nenner teilerfremd bleiben:

$$\begin{aligned} 4b^2 &= (2k)^2 \\ 4b^2 &= 4k^2 \qquad \mid :4 \\ b^2 &= k^2 \qquad \mid \sqrt{\ } \\ b &= k \end{aligned}$$

[6] Beispiele für (gekürzte) teilerfremde Brüche: $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, der größte gemeinsame Teiler von 3 und 5 ist die 1: $\text{ggT}(3{,}5) = 1$. $\frac{30}{5} = \frac{6}{1}$, $\text{ggT}(6{,}1) = 1$. Für $\frac{17}{13}$ gilt: $\text{ggT}(17{,}13) = 1$. Die Fälle mit einer 0 im Zähler $\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \ldots\}$ sind hierbei berücksichtigt, die Null ist durch alle Zahlen teilbar: $\forall x \in \mathbb{N}$ (generell $\forall x \in \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) gilt „$x$ teilt 0". Brüche der Form $\frac{0}{x}$ (mit $x \in \mathbb{N}$) lassen sich nicht mehr kürzen. Da im Zähler $1 \mid 0$ gilt („1 teilt 0") und im Nenner $1 \mid x$, ist $\frac{0}{x}$ immer teilerfremd, hat also nur die 1 als größten gemeinsamen Teiler: $\text{ggT}(0, x) = 1$.

[7] Gerade Zahlen sind Vielfache von 2, sie haben die Form $2 \cdot k$. Die Menge der möglichen natürlichen Zahlen für k umfaßt auch die Null ($k \in \mathbb{N}_0$), damit neben positiven und negativen geraden Zahlen auch der Fall $2 \cdot 0 = 0$ möglich ist. Die Null wird also ebenfalls als gerade Zahl betrachtet. Für unser b^2 gilt natürlich trotzdem $b^2 \geqq 1$, da ja $b > 0$ gelten muß ($b \in \mathbb{N}$), damit keine Division durch Null auftreten kann.

[8] $2 \mid a^2$ bzw. $2 \in \mathrm{T}_{a^2}$.

gerung: Wenn eine Zahl gerade ist, dann ist auch ihr Quadrat gerade.[9] Wenn eine Zahl ungerade ist, dann ist auch ihr Quadrat ungerade.[10]

Aus der Geradzahligkeit von a^2 folgt also, daß auch die Zählervariable a eine gerade Zahl sein muß.[11]

5. Da die 2 ein Teiler von a ist, also eine gerade Zahl ist, können wir das a in $2b^2 = a^2$ durch $2k$ ersetzen ($k \in \mathbb{N}_0$):

$$\begin{aligned} 2b^2 &= a^2 \\ 2b^2 &= (2k)^2 \\ 2b^2 &= 4k^2 \qquad | \ :2 \\ b^2 &= 2k^2 \ \lightning \end{aligned}$$

In der letzten Zeile ist nun der Widerspruch aufgetreten: Wenn $b^2 = 2k^2$ gilt, dann ist b^2 und somit auch die Nennervariable b gerade. In unserer Annahme sind wir jedoch davon ausgegangen, daß unser Bruch $\frac{a}{b}$ bereits teilerfremd ist, das heißt in gekürzter Form vorliegt. Wenn nun aber der Zähler *und* der Nenner beide gerade sind, dann kann man den Bruch noch kürzen.[12]

Somit ist die Annahme, daß $\sqrt{2}$ nicht irrational ist, falsch. Gemäß dem *Satz des ausgeschlossenen Dritten* haben wir damit bewiesen, daß die erste Aussage wahr ist: $\sqrt{2}$ ist irrational.

$\square$

2.3 Beweis in Kurzschreibweise

Beim Verfassen mathematischer Texte ist es vorteilhaft, die Inhalte parallel auch in reiner mathematischer Notation zu notieren. Dadurch erschließt sich das Dokument einer

[9] Beispiele für $x = (2k)^2$, mit $k \in \mathbb{N}$: $x = 2, x^2 = 4$; $x = 4, x^2 = 16$; $x = 6, x^2 = 36$.

[10] Beispiele für $x = (2k+1)^2$, mit $k \in \mathbb{N}_0$: $x = 1, x^2 = 1$; $x = 3, x^2 = 9$; $x = 5, x^2 = 25$.

[11] Bei geraden und ungeraden Zahlen muß jeder Primfaktor ($p \geqq 2$) von a in a^2 mindestens zweimal vorkommen.Gerade Zahlen enthalten auch immer die 2 als Primfaktor. Beispiele für gerade Zahlen:
$a = 2\,(= 2), a^2 = 4\,(= 2 \cdot 2)$;
$a = 4\,(= 2 \cdot 2), a^2 = 16\,(= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$;
$a = 6\,(= 2 \cdot 3), a^2 = 36\,(= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3)$;
$a = 8\,(= 2 \cdot 2 \cdot 2), a^2 = 64\,(= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$;
$a = 10\,(= 2 \cdot 5), a^2 = 100\,(= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5)$
$a = 30\,(= 2 \cdot 3 \cdot 5), a^2 = 900\,(= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5)$.
Beispiele für ungerade Zahlen:
$a = 3\,(= 3), a^2 = 9\,(= 3 \cdot 3)$;
$a = 5\,(= 5), a^2 = 25\,(= 5 \cdot 5)$;
$a = 15\,(= 3 \cdot 5), a^2 = 225\,(= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5)$.
Die jeweiligen Primfaktoren einer Quadratzahl a^2 kommen also auch in der Basiszahl a vor.

[12] Beispiele für ungekürzte gerade Brüche $\frac{a}{b}$, mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$:
$\{\ldots, -\frac{4}{4}, -\frac{2}{4}, \ldots, -\frac{4}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \ldots, \frac{2}{4}, \frac{4}{4}, \ldots\}$.

internationalen Leserschaft.

Mengennotationen können variieren, darüberhinaus werden irrationale Zahlen manchmal auch in einer eigenen, mit einem großen $\mathbb{I}$ bezeichneten Menge zusammengefaßt: $\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \pi, \dots\}$.[13]

2.3.1 Erläuterung der mathematischen Symbole

Das Zeichen für Teilbarkeit, $|$. Beispiel: $2 \mid 4$, lies „2 teilt 4". $2 \nmid 5$, lies „2 teilt 5 nicht". Allgemein: $a \mid b$, „a teilt b". $a \nmid b$, „a teilt b nicht".

Teilerfremdheit, $\perp$. Beispiel: $3 \perp 5$, lies „3 ist teilerfremd zu 5" bzw. „3 ist relativ prim zu 5" bzw. „3 und 5 sind relativ prim (zueinander)". $3 \not\perp 6$, lies „3 ist nicht teilerfremd zu 6" bzw. „3 ist nicht relativ prim zu 6" bzw. „3 und 6 sind nicht relativ prim (zueinander)". Allgemein: $a \perp b$, „a ist teilerfremd zu b" bzw. „a ist relativ prim zu b" bzw. „a und b sind relativ prim zueinander". $a \not\perp b$, lies „a ist nicht teilerfremd zu b" bzw. „a ist nicht relativ prim zu b" bzw. „a und b sind nicht relativ prim zueinander".[14]

Der Allquantor, $\forall$, auch Allzeichen genannt, stammt aus der Aussagenlogik und wird gelesen als „für alle". Beispiel: „$\forall x \in A$ gilt:", lies „für alle x Element A gilt:".

Die Implikation, $\Rightarrow$. Beispiel: $A \Rightarrow B$, lies „Aus A folgt B", oder „wenn A dann B".

Die logische Äquivalenz, $\Leftrightarrow$. Beispiel: $A \Leftrightarrow B$, lies „A äquivalent B", oder „A genau dann, wenn B".

O. B. d. A., „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit": Siehe Abschnitt 1.3 auf Seite 2 und Fußnote 5 auf Seite 3.

2.3.2 Beweis $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, in Kurzschreibweise

Es folgt eine von mehreren möglichen Niederschriften des Beweises in Kurzschreibweise.

Z. z.: $\sqrt{2}$ ist irrational ($\sqrt{2} \in \mathbb{R}$).

Beweis: indirekt. Wir nehmen an, daß $\sqrt{2}$ nicht irrational ist:

1. Annahme: $\sqrt{2}$ ist nicht irrational $\Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, d. h. $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
2. OBdA: $a \perp b$.
3. $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2$.
4. $(2b^2 = a^2) \Rightarrow 2 \mid a^2$, da $a^2 = \pm 2k$, mit $k \in \mathbb{N}_0$.

[13] In diesem Artikel wird überwiegend die serifenlose Variante von „dsfont" für Zahlenmengen verwendet, in Anlehnung an die Doppelstrichnotation bei Tafelaufschrieben: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Die Schriftart (der Zeichensatz, der Font) „amsb" ist weitverbreitet: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. In älterer Literatur werden meistens Frakturbuchstaben als Symbole für Zahlenmengen verwendet.

[14] In der Geometrie zeigt das Symbol $\perp$ Orthogonalität (Rechtwinkligkeit) zwischen Vektoren an. Beispiel: $\vec{a} \perp \vec{b}$, „$\vec{a}$ ist orthogonal zu $\vec{b}$".

5. $\forall x$ mit $x = 2k,\ k \in \mathbb{N}_0 : x^n = 2k$ bzw. $2 \mid x^n$.
6. $\Rightarrow 2 \mid a$, und: $2b^2 = a^2 \Leftrightarrow 2b^2 = (2k)^2$.
7. $\Rightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow a \not\perp b \Rightarrow ↯$ zu 2.

$\square$

Für eine ausführlichere Illustration können die einzelnen Rechenschritte auch über die Äquivalenzpfeile geschrieben werden. Beispiel:

Zeigen Sie: $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: indirekt.

1. Annahme: $\sqrt{13} \in \mathbb{Q}$. $\Rightarrow \sqrt{13} = \frac{a}{b}$.
2. O. B. d. A.: $a \perp b$.
3. $\sqrt{13} = \frac{a}{b} \overset{()^2}{\Leftrightarrow} 13 = \frac{a^2}{b^2} \overset{\cdot b^2}{\Leftrightarrow} 13b^2 = a^2 \overset{:a}{\Leftrightarrow} 13\frac{b^2}{a} = a \Rightarrow 13 \mid a$.
4. $13b^2 = a^2 \overset{a:=13k}{\Longleftrightarrow} 13b^2 = (13k)^2 \Leftrightarrow 13b^2 = 169k^2 \overset{:13}{\Leftrightarrow} b^2 = 13k^2 \overset{:b}{\Leftrightarrow} b = 13 \cdot \frac{k^2}{b} \Rightarrow 13 \mid b$.
5. $\Rightarrow a \not\perp b \Rightarrow ↯$ zu 2.

$\square$

3 Übungsaufgaben mit Lösungen

Von den folgenden Aufgaben wurden die ersten vier aus [1][15] entnommen.

1. Zu zeigen: $\sqrt{3}$ ist irrational.

Beweis: indirekt.

1. Annahme: $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Dann folgt: $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$; a und b liegen gekürzt und teilerfremd vor.

2.
$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= \frac{a}{b} && \mid (\ )^2 \text{ Quadrieren} \\ 3 &= \frac{a^2}{b^2} && \mid \cdot b^2 \\ 3b^2 &= a^2 \end{aligned} \tag{1}$$

3. Isolieren der Zählervariablen: Aus $3b^2 = a^2$ folgt $3 \mid a^2$, da die 3 in $3 \cdot b^2 = a^2$ ein Teiler (Primfaktor) von a ist.

[15] Seite 99, Übungsaufgabe 212, a) bis d)

4. Aus $3 \mid a^2$ folgt $3 \mid a$:

$$\begin{aligned}
3b^2 &= a^2 \\
3b^2 &= a \cdot a \quad \mid : a \\
\frac{3b^2}{a} &= a \\
3 \cdot \left(\frac{b^2}{a}\right) &= a \\
&\Rightarrow 3 \mid a
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen den Koeffizienten der 3 mit k, bzw. „wir setzen den Koeffizienten gleich k“:

$$3 \cdot \underbrace{\left(\frac{b^2}{a}\right)}_{:=\,k} = a$$

Es gilt also: $3k = a$.

5. Isolieren der Nennervariablen: Wir setzen unser Ergebnis für a nun in (1) ein.

$$\begin{aligned}
3b^2 &= a^2 \\
3b^2 &= (3k)^2 \\
3b^2 &= 9k^2 \quad \mid : 3 \\
b^2 &= 3k^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow 3 \mid b^2$, da die 3 ein Primfaktor von b^2 ist:

$$b^2 = \underbrace{3}_{\text{Teiler}} \cdot k$$

6. Aus $3 \mid b^2 \Rightarrow 3 \mid b$:

$$\begin{aligned}
b^2 &= 3k^2 \quad \mid : b \\
b &= 3 \cdot \frac{k^2}{b}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3 \mid b \quad \lightning$$

$3 \mid a$ und $3 \mid b$ ist ein Widerspruch zur Annahme, daß a und b teilerfremd sind.

$\Rightarrow \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

$\square$

2. Zeigen Sie: $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: indirekt.

1. Annahme: $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$.

2. Dann folgt ($\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$), a und b gekürzt und teilerfremd:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} &= \frac{a}{b} \\
\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} &= \frac{a}{b} \qquad |\ (\ )^2 \\
(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\
\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} &= \frac{a^2}{b^2} \\
2 \cdot 3 &= \frac{a^2}{b^2} \qquad |\ \cdot b^2 \\
2 \cdot 3 \cdot b^2 &= a^2
\end{aligned}$$

Die 2 ist Teiler von a^2: $2 \mid a^2$.

3. Isolieren der Zählervariablen:

$$\begin{aligned}
2 \cdot 3 \cdot b^2 &= a^2 \qquad |\ :a \\
\frac{2 \cdot 3 \cdot b^2}{a} &= a \\
\frac{2}{1} \cdot \frac{3 \cdot b^2}{a} &= a \\
\underbrace{2}_{\text{Teiler von } a} \cdot \frac{3b^2}{a} &= a
\end{aligned}$$

$\Rightarrow 2 \mid a$, der Zähler ist gerade.

4. Isolieren der Nennervariablen: a ist also eine gerade Zahl, d. h. $a = 2k$.

$$\begin{aligned}
6b^2 &= a^2 \\
6b^2 &= (2k)^2 \\
6b^2 &= 4k^2 \qquad |\ :2 \\
3b^2 &= 2k^2
\end{aligned}$$

Aus $3 \cdot \underbrace{b^2}_{\text{gerader Teil}} = 2k^2$ folgt $2 \mid b^2$.

5.

$$\begin{aligned}
3b^2 &= 2k^2 \qquad |\ :b \\
\frac{3b^{\cancel{2}}}{\cancel{b}} &= \frac{2k^2}{b} \qquad |\ :3 \\
b &= \frac{2k^2}{b \cdot 3} \\
b &= \frac{2}{1} \cdot \frac{k^2}{3b} \\
b &= 2 \cdot \frac{k^2}{3b} \\
&\Rightarrow 2 \mid b \ ↯
\end{aligned}$$

Wenn $2 \mid a$ und $2 \mid b$ gilt, dann haben der Zähler und der Nenner einen gemeinsamen Teiler. Das widerspricht der Annahme, daß a und b teilerfremd sind.

q. e. d.

3. Beweisen Sie: $\sqrt[3]{5} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: indirekt.

1. Annahme: $\sqrt[3]{5}$ ist rational, a und b liegen gekürzt und teilerfremd vor. Wir formen die Gleichung um und isolieren anschließend die Zählervariable und die Nennervariable.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{5} &= \frac{a}{b} \quad &&|\ (\ )^3 \\ 5 &= \frac{a^3}{b^3} \quad &&|\ \cdot b^3 \\ 5b^3 &= a^3 && (1) \end{aligned}$$

2. Isolieren der Zählervariablen:

$$5 \cdot b^3 = a^3$$

$$\Rightarrow 5 \text{ ist Primteiler von } a^3 : 5 \mid a^3$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot b^3 &= a^3 \quad &&|\ : a^2 \\ 5 \cdot \frac{b^3}{a^2} &= a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5 \mid a$$

3. Isolieren der Nennervariablen: Aus (1) wissen wir, daß 5 ein Teiler von a^3 ist ($5 \mid a^3$), daher setzen wir $a^3 = 5k$.

$$\begin{aligned} 5b^3 &= a^3 \\ 5b^3 &= (5k)^3 \\ 5b^3 &= 5^3 \cdot k^3 \\ 5b^3 &= 125k^3 \quad &&|\ : 5 \\ b^3 &= 25 \cdot k^3 \\ b^3 &= 5 \cdot 5 \cdot k^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5 \mid b^3$$

4.

$$\begin{aligned} b^3 &= 25k^3 \quad &&|\ : b^2 \\ \frac{b^{\cancel{3}1}}{\cancel{b^2}} &= 25 \cdot \frac{k^3}{b^2} \\ b &= 5 \cdot 5 \cdot \frac{k^3}{b^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5 \mid b \ \lightning$$

Da $5 \mid a$ und $5 \mid b$ gilt, sind a und b nicht teilerfremd.

■

4. Zu beweisen: $\sqrt[3]{6}$ ist irrational.

Beweis: indirekt.

Annahme: $\sqrt[3]{6}$ ist rational. Dann gilt, mit a und b gekürzt und teilerfremd vorliegend: $\sqrt[3]{6} = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$.

1. Umformen und Isolieren der Zählervariablen:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{6} &= \frac{a}{b} \\
\sqrt[3]{6} &= \frac{a}{b} \quad \mid (\ )^3 \\
6 &= \left(\frac{a}{b}\right)^3 \\
6 &= \frac{a^3}{b^3} \quad \mid \cdot b^3 \\
6b^3 &= a^3 && (1) \\
(2 \cdot 3) \cdot b^3 &= a^3 \quad \mid : a^3 \\
\frac{a^{\cancel{3}}}{\cancel{a^2}} &= (2 \cdot 3) \cdot \frac{b^3}{a^2} \\
a &= 3 \cdot \underbrace{\left(2 \cdot \frac{b^3}{a^2}\right)}_{:= k} && (2)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow 3 \mid a$, da die 3 ein Primteiler von a ist.

2. Isolieren der Nennervariablen b: Aus (2) folgt $a = 3k$. Einsetzen in (1):

$$\begin{aligned}
6b^3 &= a^3 \\
6b^3 &= (3k)^3 \\
6b^3 &= 27k^3 \quad \mid : 3 \\
2b^3 &= 9k^3 \quad \mid : 2 \\
b^3 &= \frac{9}{2} \cdot k^3 \quad \mid : b^2 \\
b &= \frac{9}{2} \cdot \frac{k^3}{b^2} \\
b &= \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{k^3}{b^2} \\
b &= 3 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{k^3}{b^2}\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow 3 \mid b$ ↯

Da Zähler und Nenner, a und b nicht wie angenommen teilerfremd sind, die $\sqrt[3]{6}$ sich nicht als Bruch darstellen läßt, muß, gemäß dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten, die $\sqrt[3]{6}$ irrational sein: $\sqrt[3]{6} \in \mathbb{I}$.

$\sqrt[3]{6} \notin \mathbb{Q}$ bzw. $\sqrt[3]{6} \in \mathbb{I}$ bzw. $\sqrt[3]{6} \in \mathbb{R}$.

□

5. Zu zeigen: $\sqrt{7} \in \mathbb{I}$.

Beweis: indirekt.
1. Annahme: $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$. $\Rightarrow \sqrt{7} = \frac{a}{b}$.
2. O. B. d. A.: $a \perp b$.
3. $\sqrt{7} = \frac{a}{b} \overset{()^2}{\Leftrightarrow} 7 = \frac{a^2}{b^2} \overset{\cdot b^2}{\Leftrightarrow} 7b^2 = a^2 \overset{:a}{\Leftrightarrow} 7 \cdot \frac{b^2}{a} = a \overset{k:=\frac{b^2}{a}}{\Leftrightarrow} 7 \cdot k = a \Rightarrow 7 \mid a$.
4. $7 \cdot b^2 = a^2 \overset{a:=7\cdot k}{\Longleftrightarrow} 7b^2 = (7k)^2 \Leftrightarrow 7b^2 = 49k^2 \overset{:7}{\Leftrightarrow} b^2 = 7k^2 \overset{:b}{\Leftrightarrow} b = 7 \cdot \frac{k^2}{b} \Rightarrow 7 \mid b$.
5. $\Rightarrow a \not\perp b \Rightarrow$ ↯ zu 2.

□

6. Man beweise: $\sqrt{11} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: indirekt.

1. Annahme: $\sqrt{11} \in \mathbb{Q}. \Rightarrow \sqrt{11} = \frac{a}{b}$.
2. O. B. d. A.: $a \perp b$.
3. $\sqrt{11} = \frac{a}{b} \overset{()^2}{\Leftrightarrow} 11 = \frac{a^2}{b^2} \overset{\cdot b^2}{\Leftrightarrow} 11b^2 = a^2 \overset{:a}{\Leftrightarrow} 11 \cdot \frac{b^2}{a} = a \overset{k:=\frac{b^2}{a}}{\Leftrightarrow} 11 \cdot k = a \Rightarrow 11 \mid a.$
4. $11 \cdot b^2 = a^2 \overset{a:=11\cdot k}{\Longleftrightarrow} 11b^2 = (11k)^2 \Leftrightarrow 11b^2 = 121k^2 \overset{:11}{\Leftrightarrow} b^2 = 11k^2 \overset{:b}{\Leftrightarrow} b = 11 \cdot \frac{k^2}{b}$
   $\Rightarrow 11 \mid b$.
5. $\Rightarrow a \not\perp b \Rightarrow$ ↯ zu 2.

$\square$

Literatur

[1] Robert Müller: *Mathematik verständlich.* Falken-Verlag GmbH, 1983.

[2] *Teubner-Taschenbuch der Mathematik.* Begründet von I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew. Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler. B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig 1996.

[3] Dr. Detlef Wille: *Mathematik-Vorkurs für Studienanfänger.* Binomi-Verlag, 2010.

[4] Helmuth Preckur: *Mentor Abiturhilfe Mathematik, Analysis für die Oberstufe, 1.* Mentor Verlag München, 1994.

[5] Wikipedia: *Liste mathematischer Symbole*, http://de.wikipedia.org/wiki/Liste_mathematischer_Symbole. 24. Dezember 2013.

[6] Wikipedia: *Square root of 2*, http://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_2. 24. Dezember 2013.

[7] Wikipedia: *Wurzel 2*, http://de.wikipedia.org/wiki/Wurzel_2. 24. Dezember 2013.

[8] Wikipedia: *Racine carrée de deux*, http://fr.wikipedia.org/wiki/Racine_carr%C3%A9e_de_deux. 24. Dezember 2013.

[9] Richard Delaware: *Proof – The Square Root of 2 is Irrational*,
Video-Based Supplemental Instruction in College Algebra,
University of Missouri-Kansas City, Department of Mathematics and Statistics,
http://www.youtube.com/watch?v=2NjUZHmTxSA.

[10] Wikipedia: *Beweis (Mathematik)*,
http://de.wikipedia.org/wiki/Beweis_%28Mathematik%29.
24. Dezember 2013.

[11] Wikipedia: *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*,
http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_vom_ausgeschlossenen_Dritten.
24. Dezember 2013.

[12] Wikipedia: *Mehrwertige Logik*,
http://de.wikipedia.org/wiki/Mehrwertige_Logik.
24. Dezember 2013

[13] Gotthard Günther: *Idee und Grundriß einer nicht-Aristotelischen Logik. 1. Band: Die Idee und ihre philosophischen Voraussetzungen.* Verlag von Felix Meiner, Hamburg 1959.

Impressum

3.1 Impressum

Peter Jockisch
Habsburgerstraße 11
79104 Freiburg i. Br.
Deutschland
peterjockisch.com